STX

STUDENTEREKSAMEN

MATEMATIK A

Onsdag den 12. april 2023
Kl. 9.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling, herunder vedlagte indstiksark til formelsamlingen.

Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-8.
Til delprøve 1 hører et bilag.

Delprøve 2 består af opgave 9-14.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1 kl. 9.00-11.00

Opgave 1 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^y \cdot (x-4).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(9, 0)$.

(10 point) a) Bestem linjeelementet i punktet P.

Opgave 2 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = 4x + 2y + 3x^2 \cdot y\ .$$

(10 point) a) Bestem $f(5, 1)$.

(10 point) b) Bestem den partielt afledede $f'_x(x,y)$.

Opgave 3 En cirkel er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til centrum.

(10 point) b) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til cirklen i punktet $P(1, 7)$.

Opgave 4 En parabel er givet ved ligningen

$$y^2 = -9x\ .$$

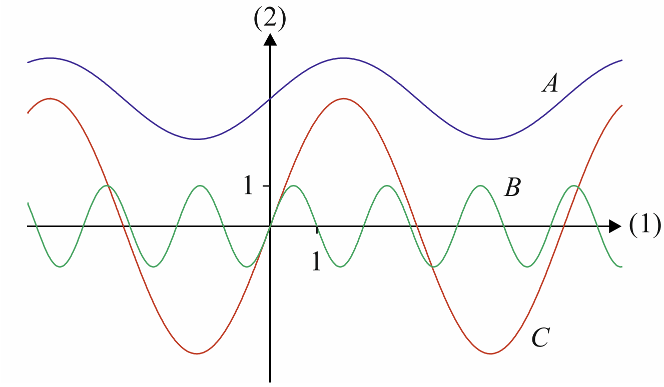
(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til parablen i punktet $P(-1, 3)$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

Bilag vedlagt

$$f(x) = \pi \cdot \sin(x)\ .$$

En af de tre grafer A, B og C på figuren er graf for f.



(10 point) a) Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for f, og gør rede for, hvorfor det ikke kan være de to andre.

Opgave 6

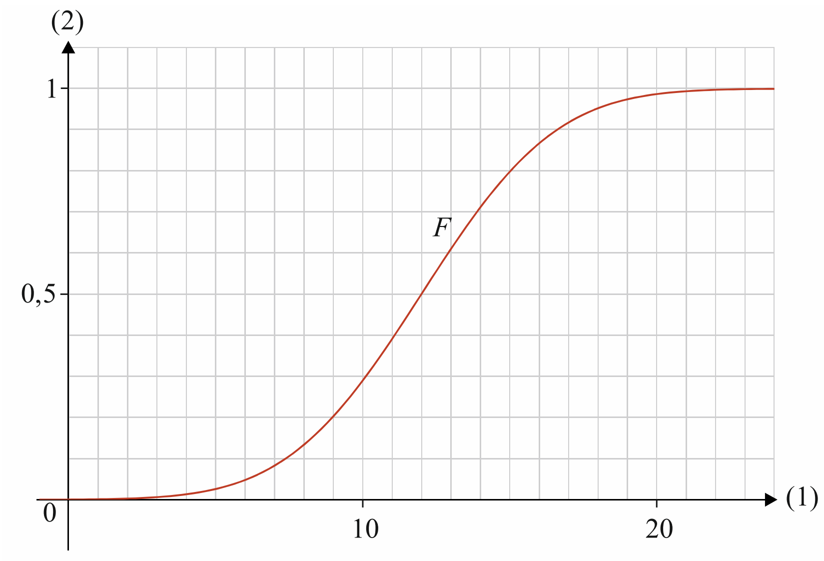
(10 point)

a) Reducér udtrykket

$$\frac{6a\cdot(a^2+b^2+2a\cdot b)}{2\cdot(a+b)}.$$

Opgave 7

Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X.

(10 point) a) Bestem middelværdien μ. Brug bilaget.

(10 point) b) Bestem tallet k, så $P(9 \le X \le k) = 0,60$. Brug bilaget.

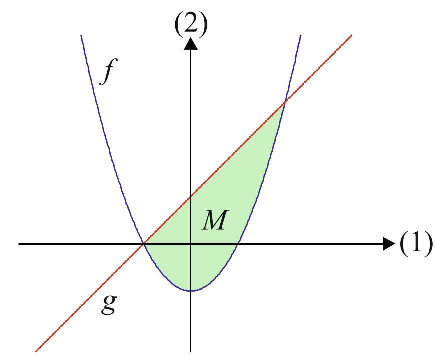
Opgave 8 Funktionerne f og g er bestemt ved

$$f(x)=x^2-1 \quad \text{og} \quad g(x)=x+1.$$

(10 point) a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g.

Graferne for de to funktioner afgrænser et område M, der har et areal.

(10 point) b) Bestem arealet af området M.



Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 9x^2 \cdot \ln(x).$$

(10 point) a) Bestem den stamfunktion F til f, hvis graf går gennem punktet $P(1, 10)$.

Opgave 10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

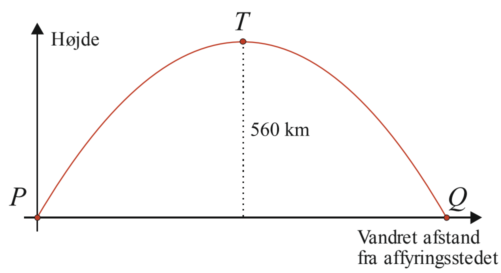
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2 \cdot t^2 \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hastighedsvektoren for $t = 2$.

(10 point) c) Bestem de t-værdier, hvor hastighedsvektoren står vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 11 Under den kolde krig anvendtes en bestemt type mellemdistanceraketter med en rækkevidde $|PQ|$ på 2400 km og en maksimal højde på 560 km.
Rakettens bane kan beskrives som graf for et andengradspolynomium



$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor x er den vandrette afstand fra affyringsstedet (målt i km), og $f(x)$ er rakettens højde over jorden (målt i km).

(10 point) a) Bestem en forskrift for f.

(10 point) b) Bestem kurvelængden af grafen fra P til Q.

Opgave 12 En funktion af to variable er givet ved

$$f(x, y) = (x-4)^2 - (y-1)^2 + 4.$$

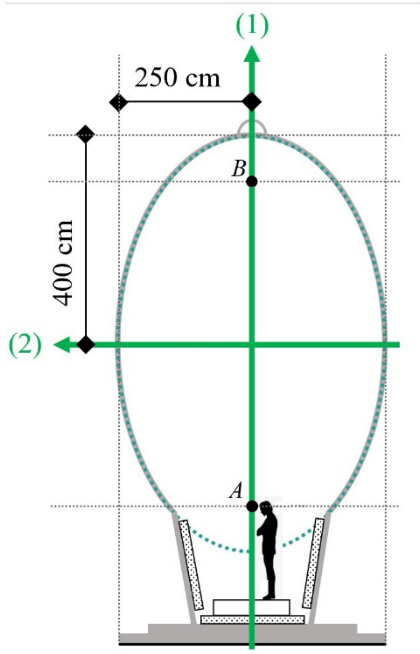
(10 point) a) Tegn grafen for f i vinduet $[-5;10] \times [-5;10] \times [-5;10]$.

Funktionen f har ét stationært punkt P.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til P.

Opgave 13

Figur 1
Billedkilde: Architectenweb



Figur 2

Billedet på figur 1 viser lydinstallationen "Klankkaatser" i Amsterdam. Installationen har et lodret tværsnit, der er ellipseformet. Der er på figur 2 indlagt et koordinatsystem med enheden cm på begge akser. Ellipsens halvakser fremgår af figuren.

(10 point) a) Bestem en ligning for ellipsen.

Punkterne A og B er ellipsens brændpunkter. Fra punktet B udsendes svag lyd, som tydeligt kan høres af en person i punktet A.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Dette er en opgave i forberedelsesmaterialet som I ikke har været igennem endnu. Men opgaven kan faktisk løses med brug af "indstiksark", da der kun er brug for aflæsning på figur og derefter brug af to formler. Så får I set, hvordan forberedelsesmaterialet bliver testet.

Opgave 14 I en model (model 1) beskriver man udviklingen i Jordens befolkningstal ved differentialligningen

$$p' = 0{,}015 \cdot p^{1{,}2} ,$$

hvor $p(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990.
I 1990 var befolkningstallet 5,28 mia.

(10 point) a) Med hvilken hastighed voksede befolkningstallet i 1990 ifølge modellen.

(10 point) b) Bestem befolkningstallet i 2030 ifølge modellen.

I en anden model (model 2) beskrives Jordens befolkningstal ved forskriften

$$f(x) = 5{,}28 \cdot e^{0{,}015 \cdot x} ,$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990.

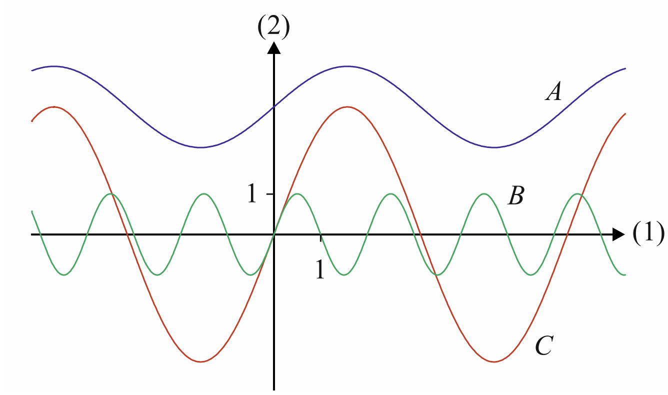
(10 point) c) I hvilket år vil befolkningstallet blive 50 % større ifølge model 1, end det vil blive ifølge model 2?

BILAG stx matematik A april 2023

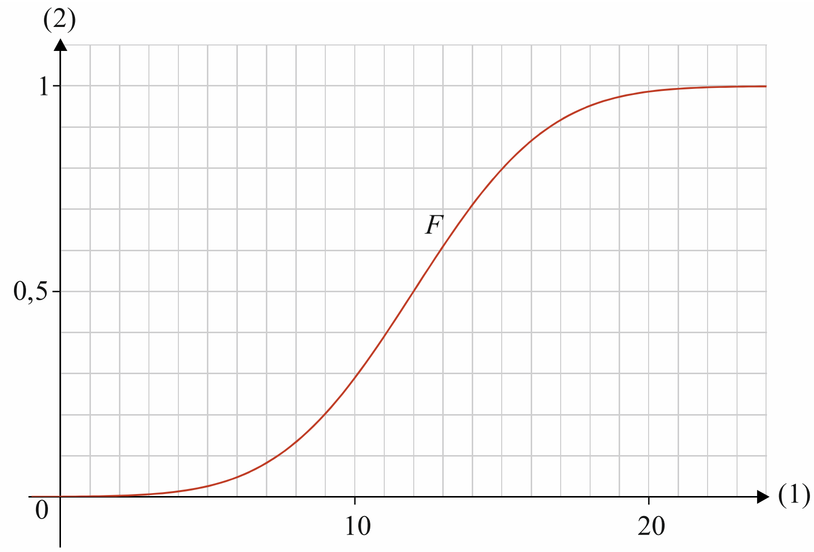
Bilaget indgår i opgavebesvarelsen

Skole		Hold	ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Opgave 5

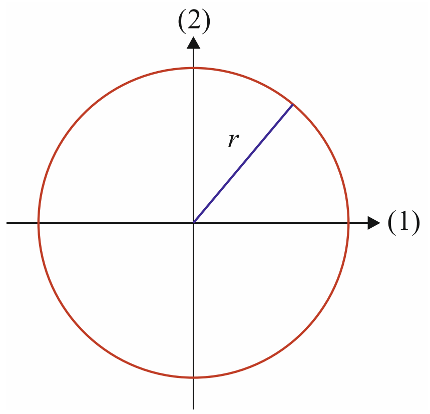


Opgave 7



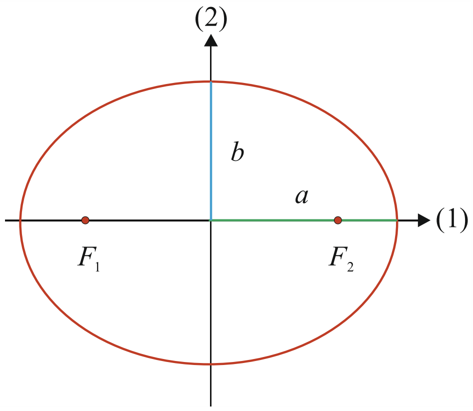
Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Den generelle andengradsligning i to variable — F(1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



Cirkel

Ligning på normalform for cirkel med centrum $C(0,0)$ og radius r — F(2) $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$



Ellipse

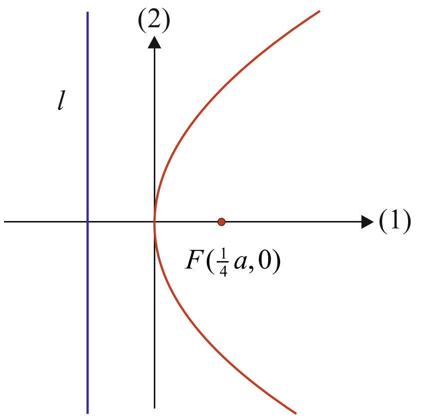
Areal A af ellipse med halvakser a og b — F(3) $A = \pi \cdot a \cdot b$

Ligning på normalform for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b — F(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Koordinatsæt til brændpunkter for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b — F(5) $F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ og $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$

Ligning for tangenten i punktet $P(x_0, y_0)$ til ellipsen med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b — F(6) $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(7)	$y=a\cdot x^2$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(8)	$F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$



Parabel

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(9)	$y^2=a\cdot x$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(10)	$F(\frac{1}{4}a,0)$
Ligning for tangenten til parablen med ligningen $y^2=a\cdot x$ i punktet $P(x_0,y_0)$	F(11)	$y\cdot y_0=\frac{1}{2}a\cdot(x+x_0)$