

STX

STUDENTEREKSAMEN



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Onsdag den 4. december 2024
Kl. 9.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling, herunder vedlagte indstiksark til formelsamlingen.

Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-9.
Til delprøve 1 hører et bilag.

Delprøve 2 består af opgave 10-16.
Til delprøve 2 hører et digitalt bilag.

Der gives 10 point for hvert spørgsmål.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.

I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*
Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1 kl. 9.00-11.00

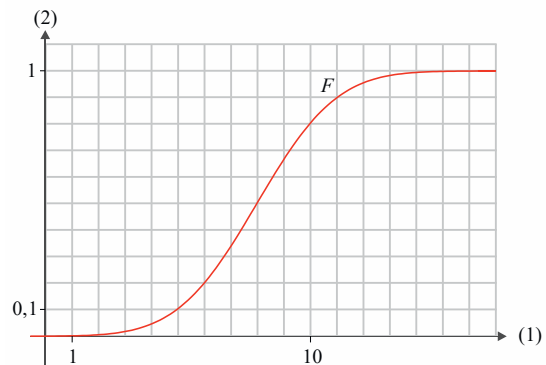
Opgave 1 a) Reducér udtrykket $(2a + b) \cdot (2a - b) + b^2$.

Opgave 2 På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

En funktion f er givet ved forskriften

Bilag vedlagt
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{8}\right)^2}.$$

a) Gør rede for, at f ikke kan være tæthedsfunktion for X .
Brug bilaget.



Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^3 - 4t^2 + 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem $\vec{r}(2)$.

b) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til banekurven for $\vec{r}$ i det punkt, hvor $t = 2$.

Opgave 4 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3}{x} \cdot y.$$

a) Bestem linjeelementet i punktet $P(1, 5)$.

b) Undersøg, om funktionen $g(x) = 6x^3 - x$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 5 En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 6)$.

Opgave 6 På en fabrik producerer maskinerne M_1 og M_2 poser med slik.

Maskine M_1 producerer 70 % af poserne.

Maskine M_2 producerer 30 % af poserne.

20 % af poserne fra maskine M_1 indeholder for lidt slik, og

10 % af poserne fra maskine M_2 indeholder for lidt slik.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt slikpose fra produktionen indeholder for lidt slik?



Billedkilde:
dontwasteyourmoney

Opgave 7 Om en funktion f af to variable oplyses det, at de partielt afledede er bestemt ved

$$f'_x(x, y) = 2x + y - 5$$

$$f'_y(x, y) = x - 4y + 2$$

- a) Bestem $\nabla f(3, 5)$.

Funktionen f har netop ét stationært punkt P .

- b) Bestem x -koordinaten og y -koordinaten til punktet P .

Opgave 8 a) Bestem $\int (x^2 + 3)^2 \cdot 4x \, dx$.

Opgave 9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin(2x) + 3x + 4.$$

- a) Gør rede for, at f er en voksende funktion.

Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^4 + 2t \\ t^3 - t + 2 \end{pmatrix}.$$

- Tegn banekurven for $\vec{s}$.
- Bestem de t -værdier, hvor banekurven har en vandret tangent.

Opgave 11



Billedkilde: bedsttest

Tabellen viser en række målinger af sammenhørende værdier af massen af kogende vand i en gryde og den tid, som vandet har kogt.

Tid (sekunder)	0,0	1,0	...	135,0	136,0
Massen af vand (gram)	2143,3	2142,6		2041,7	2040,4

Hele tabellen med alle 137 datapunkter findes i bilaget: kogendevand.xlsx

I en lineær model kan sammenhængen mellem den tid, som vandet har kogt, og massen af det kogende vand i gryden beskrives ved

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

hvor $f(t)$ betegner massen af det kogende vand i gryden (målt i gram) t sekunder, efter vandet er begyndt at koge.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b , og giv en fortolkning af den fundne a -værdi.
- Gør rede for, at residualerne i modellen med god tilnærmelse er normalfordelte.

Opgave 12 En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-3) \cdot (x-5), \quad x \geq 0.$$

- Bestem monotoniforholdene for f ved hjælp af $f'(x)$.

Opgave 13 I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion risengrød beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0,05y,$$

hvor $y = f(t)$ betegner risengrødens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$), og t er tiden (målt i minutter), efter den blev sat til afkøling.



Billedkilde: tv2.dk

- a) Bestem væksthastigheden for grødens temperatur, når den er 70°C .

Det oplyses, at til tidspunktet $t = 0$ er væksthastigheden for grødens temperatur -3°C pr. minut.

- b) Bestem en forskrift for $f(t)$.

Opgave 14 I en bestemt virksomhed udgør antallet af kvindelige ansatte på deltid 13 % af det samlede antal ansatte.

54 % af virksomhedens ansatte er kvinder.

- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvindelig ansat er på deltid.

Blandt de af virksomhedens ansatte, der er på deltid, er 61 % kvinder.

- b) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ansat er på deltid.

Opgave 15 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{1}{6} \cdot (x^2 + y^2 - 4x \cdot y - 7).$$

- a) Gør rede for, at punkterne $A(-3, 2, 5)$ og $B(9, 2, 1)$ ligger på grafen for f .

- b) Bestem længden af snitkurven fra punktet A til punktet B .

Opgave 16 To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 6x - x^2$$

$$g(x) = k \cdot x, \quad \text{hvor } 0 < k < 6.$$

- a) Bestem for $k = 2$ koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g .

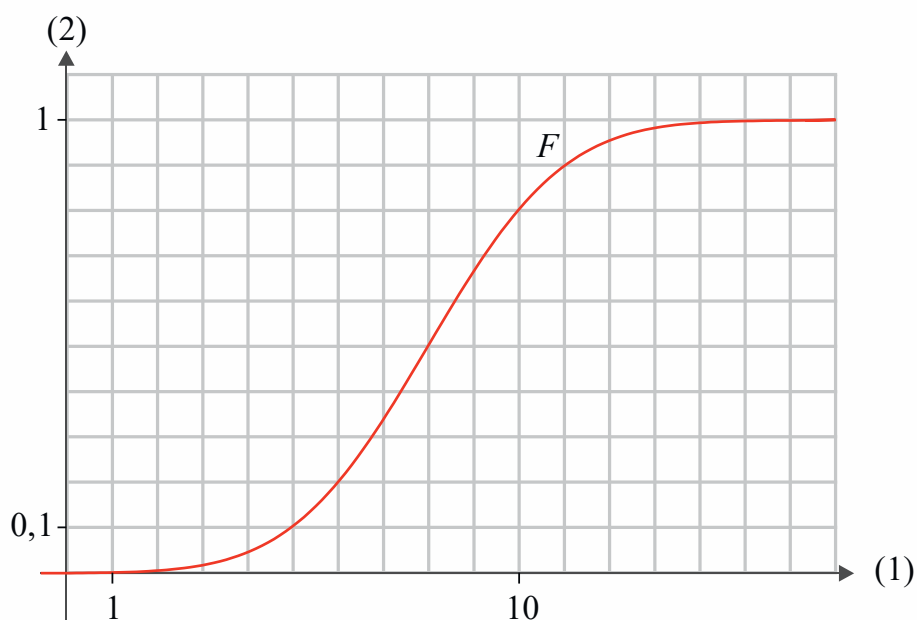
I første kvadrant afgrænser graferne for f og g et område M , der har et areal.

- b) Bestem k , så arealet af M er lig 18.

Bilaget indgår i opgavebesvarelsen

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Opgave 2



Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Udfaldsrum U med n udfald	F(1)	$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
Hændelse A med k udfald fra U	F(2)	$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(3)	$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$
<i>Symmetrisk sandsynlighedsfelt</i>		
Alle sandsynligheder er lige store	F(4)	$P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n) = \frac{1}{n}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(5)	$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$
<i>Regneregler i sandsynlighedsfelt</i>		
Sandsynlighed for komplementærhændelsen $\bar{A}$ til A	F(6)	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Sandsynlighed for foreningshændelse	F(7)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
<i>Betinget sandsynlighed</i>		
Definition på betinget sandsynlighed	F(8)	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Loven om total sandsynlighed	F(9)	$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)$
Bayes' sætning	F(10)	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Bayes' udvidede sætning	F(11)	$P(A_i B) = \frac{P(B A_i) \cdot P(A_i)}{P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)}$

Dette prøvesæt er omfattet af ophavsretten, jf. ophavsretslovens § 1. Prøvesættet må alene anvendes til den på prøvesættet anførte prøve. Al anden anvendelse af prøvesættet, herunder visning eller deling f.eks. via internettet, sociale medier, portaler og bøger, udgør en krænkelse af Børne- og Undervisningsministeriets og evt. tredjemands ophavsret og er ikke tilladt. Overtrædelse af ophavsretten kan være erstatningspådragende og/eller strafbart.

Prøvesættet kan dog, efter at prøveperioden er afsluttet, anvendes til undervisningsbrug på uddannelser m.v. omfattet af den lovgivning, som Styrelsen for Undervisning og Kvalitet administrerer.